Índice

Resumen

En este documento encontrarás la traducción de este importante libro para el análisis matemático traducido por Jesús Real, aclaro que no se encontrará la traducción de todo el libro sino de los primeros 6 capítulos incluyendo sus ejercicios con su correspondiente demostración. Algunos de los temas que abarqueros son:

1. Un pequeño repaso de las defınciones y teoremas importantes del cálculo

Traducción al español del libro Principios del Análisis Matemático

Rudin,Real

2 de febrero de 2003

1. Sistemas de números reales y complejos

Introducción

Una discusión satisfactoria de los principales conceptos del análisis (por ejemplo: convergencia, continuidad, diferenciación e integración) tiene que estar basado en el concepto de número, definido con exactitud. Sin embargo, no entraremos en la discusión de los axiomas que rigen la aritmética de los números enteros, supondremos que está familiarizado con la aritmética de los números racionales (i.e, los números de la forma m/n siendo m y n enteros y $n \neq 0$). El sistema de los números racionales es inadecuado para nuestros propósitos, como un campo y como un conjunto ordenado.(Éstos términos serán definidos en la Sec. 1.6 y 1.12). Por ejemplo, no hay un racional p tal que $p^2 = 2$ (Que demostraremos dentro de poco). Esto nos lleva a la introducción de los llamados "*números irracionales*", que se escriben a menudo en forma de serie decimal infinita y son consideradas con la aproximación que corrresponde a un número finito de cifras. Así, la serie:

1,1.4,1.41,1.414,1.4142,...

"*tiende a* $\sqrt{2}$". Pero a menos que el número racional $\sqrt{2}$ se haya definido claramente, puede hacerse la pregunta: ¿Qué significa que la serie anterior "tienda hacia"?

Éste tipo de pregunta puede ser resuelta pronto, como el llamado *"sistema de los números reales"* es contruído.

1.1. Ejemplo

Mostremos ahora que la ecuación

$$p^2 = 2 \tag{1}$$

no puede satisfacerse por ningún número racional p. Si existe un p que satisfaga la ecuación anterior: podremos escribir $p = m/n$, donde m y n son enteros y que los dos sean pares. Supongamos que lo hemos hecho.

Entonces (1) implica

$$m^2 = 2n^2 \tag{2}$$

esto muestra que m^2 es par, por lo tanto, m es par (si m fuera impar, m^2 también lo sería) y m^2 es divisible por 4. De aquí se deduce que el segundo miembro de (2) es divisible por 4, y pr tanto n^2 es par, por lo que implica que n es par.

Por consiguiente, el suponer que se verifica (1) nos lleva a la conclusión que m y n son los dos pares, contradiciendo la elección que para ellos habíamos hecho.Luego (1) es imposible para un número racional p.

Examinemos ahora, la situación algo más cerca. Sea A el conjunto de todos los racionales positivos p, tales que $p^2 < 2$ y sea B el de todos los números racionales positivos p talque $p^2 > 2$. Mostremos ahora que A no contiene ningún número que sea el mayor, y B no contiene ninguno que sea menor, que todos los demás.

Más explícitamente, para cada p de A, podemos encontrar un racional q de A tal que $p < q$, y para cada p de B podemos encontrar un racional q de B tal que $q < p$.

Al asociar cada racional $p > 0$ el número:

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2} \tag{3}$$

Entonces:

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2} \tag{4}$$

Si $p \in A$ entonces $p^2 - 2 < 0$,(3) muestra que $q > p$ y (4) muestra que $q^2 < 2$. Así que $q \in A$.

Si $p \in B$ entonces $p^2 - 2 > 0$, (3) muestra que $q^2 < 2$. Así que $q \in B$.

1.2. Nota

El objeto de la discusión anterior ha sido el de mostrar que el sistema de los números racionales tienen ciertos hoyos, a pesar del hecho de que entre dos números racionales, siempre hay otro: Si $r < s$ entonces $r < (r+s)/2 < s$. El sistema de los números reales llena esos hoyos. Esta es la principal razón por la que el análisis juega un papel fundamental. En orden a explicar esta estructura, como también que d elos números complejos, empezamos con una breve discusión de los conceptos generales de *conjuntos ordenados* y *campos*.

Aquí están algunas de las terminologías stándard de *teoría de conjuntos* que serán usados en todo este libro.

1.3. Definición

Si A es algún conjunto (cuyos elementos pueden ser números u objetos cualesquiera), escribiremos $x \in A$ para expresar que x es un miembro de A(o un elemento) de A.

Si x no es miembro de A, escribiremos $x \notin A$.

El conjunto que no contiene elementos será llamado el *conjunto vacío*. Si un conjunto tiene al menos un elemento, éste es llamado *conjunto no vacío*.

Si A y B son conjuntos, y si cada elemento de A es un elemento de B, decimos que A es subconjunto de B, y se escribe $A \subset B$. Si en resúmen, hay un elemento de B, el cuál no está en A, entonces A es llamado *subconjunto propio de B*. Notemos que $A \subset A$ para cada conjunto A.

Si $A \subset B$ y $B \subset A$, escribimos $A = B$. De otro modo $A \neq B$.

1.4. Definición

En todo este capítulo 1, el conjunto de todos los números racionales serán denotadas por $\mathbb{Q}$.

Conjuntos ordenados

1.5. Definición

Sea S un conjunto. Un orden en S es una relación, denotada por $<$, con las siguientes dos propiedades:

1. Si $x \in S$ y $y \in S$ entonces una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

$$x < y,\ x = y \text{ ó } y < x$$

   es cierta.

2. Sean $x, y, z \in S$. Si $x < y$ y $y < z$ entonces $x < z$.

"$x < y$"puede ser leída como "x es menor que y", "x es más pequeño que y", "x precede a y", etc.

A menudo es conveniente escribir $y > x$ en lugar de $x < y$.

La notación $x \leq y$ indica que $x < y$ o $x = y$, salvo donde se especifique. En otras palabras, $x \leq y$ es la negación de $x > y$.

1.6. Definición

Un *conjunto ordenado* es un conjunto S en el cual un orden está definido.

Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es un conjunto ordenado si $r < s$ está definido de la forma talque s-r es un número racional positivo.

1.7. Definición

Supongamos que s es un conjunto ordenado, y $E \subset S$. Si existe un $\beta \in S$ tal que $x \leq \beta$ para cada $x \in E$, diremos que E es *acotado superiormente* y β es llamada la *cota superior* de E.

Las *cotas inferiores* son definidas de igual forma (con $\geq$ en lugar de $\leq$).

1.8. Definición

Supongamos que S es un conjunto ordenado, $E \subset S$, y E es *acotado superiormente*. Supongamos que existe un $\alpha \in S$ con las siguientes porpiedades:

1. α es una cota superior de E.
2. Si $\gamma < \alpha$ entonces γ no es una cota superior de E.

Entonces α es llamada emphla mínima cota superior de E [hay a lo más una, tal que α es claro en (2)] o el supremo de E, y escribimos:

$$\alpha = infE$$

La *mayor de las cotas inferiores* o *ínfimo* de un conjunto E, el cual es acotado inferiormente está definido de la misma manera:

$$\alpha = infE$$

quiere decir que α es una cota inferior de E.

1.9. Ejemplos

- Consideremos los conjuntos A y B del Ejemplo 1.1 como subconjuntos de un conjunto ordenado $\mathbb{Q}$. El conjunto A es acotado superiormente. En realidad, las cotas superiores de A son exactamente los miembros de B. Ya que B no contiene los miembros pequeños, A no tiene las mínimas cotas superiores en $\mathbb{Q}$.

  Similarmente, B está acotado inferiormente: el conjunto de todas las cotas inferiores de B consiste de A y de todo $r \in \mathbb{Q}$ con $r \leq 0$. Ya que A no tiene miembros grandes, B no tiene la mínima de las cotas inferiores en $\mathbb{Q}$.

- Si $\alpha =$ sup E existe, entonces α puede o no puede ser miembro de E. Por ejemplo: Sea E_1 el conjunto de todos los $r \in \mathbb{Q}$ con $r < 0$. Sea E_2 el conjunto de todos los $r \in \mathbb{Q}$ con $r \leq 0$.Entonces:

  $$\text{sup } E_1 = \text{sup } E_2 = 0$$

  y $0 \notin E_1$, $0 \in E_2$.

- Sea E que consiste de todos los números $1/n$, donde n=1,2,3,....Entocnes sup $E = 1$, el cual está en E, y el inf $E = 0$, el cual no está en E.

1.10. Definición

Se dice que un conjunto ordenado S tiene la *la mínima de las cotas superiores propia* si la propiedad siguiente es cierta:
Si $E \subset S$, E no vacío y E está acotado superiormente, entonces sup E existe en S.
El ejemplo 1.9(a) muestra que $\mathbb{Q}$ no tiene la mínima cota superior propia.
Mostramos que hay una relación cercana entre la máxima cota inferior y la mínima cota superior, y todos los conjuntos ordenados con la mínima cota superior propia además tiene la máxima conta inferior propia.

1.11. Teorema

Supongamos que S es un conjunto ordenado con la mínima cota inferior propia, $B \subset S$, B es no vacío y B es acotado inferiormente. Sea L el conjunto de todas las cotas inferiores de B. Entonces:

$$\alpha = \text{sup L}$$

exite en S, y $\alpha =$ inf B.
En particular, el inf B existe en S.

Prueba

Ya que B está acotada inferiormente, L es no vacío. Ya que L consiste de exactamente de los $y \in S$ las cuales satisfacen la desigualdad $y \leq x$ para todo $x \in B$, vemos que para cada $x \in B$ es una cota superior de L. L es acotada superiormente. Nuestra hipótesis acerca de S implica que por lo tanto L tiene un supremo en S; llamado α.
Si $\gamma < \alpha$ entonces (ver definición 1.8) γ no es una cota superior de L, por lo tanto $\gamma \notin B$. Siguiendo que $\alpha \leq x$ para cada $x \in B$. Y $\alpha \in L$.
Si $\alpha \leq \beta$ entonces $\beta \notin L$, ya que α es una cota superior de L.
Mostramos que $\alpha \in L$ pero $\beta \notin L$ si $\beta > \alpha$. En otras palabras, α es una cota inferior de B, pero β no está si $\beta \leq \alpha$. Esto quiere decir que $\alpha = inf$ B.

Campos

1.12. Definición

Un *campo* es un conjunto F con dos operaciones, llamadas adición y multiplicación, el cual satisface los siguientes propiedades llamados "*axiomas de campo*"(A),(M),(D):

(A) Axiomas de adición:
(A1) Si $x \in F$ y $y \in F$, entonces su suma $x + y$ está en F.
(A2) La suma es conmutativa: $x + y = y + x$ para todod $x, y \in F$.
(A3) La suma es asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todo $x, y, z \in F$.
(A4) F contiene un elemento 0 tal que $0 + x = x$ para todo $x \in F$.
(A5) A todo $x \in F$ le corresponde un elemento $-x \in F$ tal que $x + (-x) = 0$.

(M) Axiomas para la multiplicación:
(M1) Si $x \in F$ y $y \in F$, entonces su producto xy está en F.
(M2) La multiplicación es conmutativa: $xy = yx$ para todo $x, y \in F$.
(M3) La multiplicación es asociativa: $(xy)z = x(yz)$ para todo $x, y, z \in F$.
(M4) F contiene un elemento $1 \neq 0$ tal que $1x = x$ para todo $x \in F$.
(M5) Si $x \in F$ y $x \neq 0$ entonces existe un elemento $1/x \in F$ tal que $x(1/x) = 1$

(D) Ley distributiva:

$$x(y + z) = xy + xz$$

para todo $x, y, z \in F$.

1.13. Nota

- Usualmente se escribe (en cualquier campo)

  $$x - y, \frac{a}{b}, x + y + z, xyz, x^2, x^3, 2x, 3x, ...$$

  en lugar de

  $$x + (-y), x(frac1y), (x + y) + z, (xy)z, xx, xxx, x + x, x + x + x, ...$$

- El campo de los axiomas claramente contenidos en $\mathbb{Q}$, el conjunto de todos los números racionales, si la suma y la multiplicación son como de costumbre. $\mathbb{Q}$ es un campo.

- Aunque no es nuestro propósito estudiar campos (o cualquier otra estructura algebraíca) en detalle, esto es lo que vale la pena para probar que algunas propiedades familiares de $\mathbb{Q}$ son consecuencias de los campos axiomáticos; una vez que lo veamos, no necesitamos hacerlo otra vez para los números reales y para todos los números complejos.

1.14. Proposición

Los axiomas para la suma implican las siguientes afirmaciones:

- (a) Si $x + y = x + z$ entonces $y = z$.
- (b) Si $x + y = x$ entonces $y = 0$.
- (c) Si $x + y = 0$ entonces $y = -x$.
- (d) $-(-x) = x$.

El inciso (a) es una ley de cancelación. Notemos que (b) afirma que la unicidad del elemento cuya existencia está sumida en (A4), y que (c) lo hace para (A5).

Prueba

Si $x + y = x + z$, de los axiomas (A) da:

$$y = 0 + y = (-x + x) + y = -x + (x + y) = -x + (x + z) = (-x + x) + z = 0 + z = z$$

Esto prueba (a). Tomamos z=0 en (a) para obtener (b). Tomando $z = -x$ en (a) para obtener (c).
Ya que $-x + x = 0$, (c) (el cual -x en lugar de x) dado en (d).

1.15. Proposición

Los axiomas para la multiplicación implican las siguientes afirmaciones:

- (a) Si $x \neq 0$ y $xy = xz$ entonces $y = z$
- (b) Si $x \neq 0$ y $xy = x$ entonces $y = 1$
- (c) Si $x \neq 0$ y $xy = 1$ entonces $y = 1/x$
- (d) Si $x \neq 0$ entonces $1/(1/x) = x$

La desmostración es también similar a la de la proposición (1.14) que omitimos.

1.16. Proposición

Los campos axiomáticos implican las siguientes afirmaciones, para cualquier $x, y, z \in F$:

- (a) $0x = 0$
- (b) Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$ entonces $xy \neq 0$.
- (c) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$.
- (d) $(-x)(-y) = xy$

Prueba

$0x + 0x = (0 + 0)x = 0x$. Por lo tanto 1.14(b) implica que 0x=0 y (a) se cumple. A continuación, Supongamos que $x \neq 0$,$y \neq 0$, pero xy=0. Entonces dado en (a):

$$1 = (\frac{1}{y})(\frac{1}{x})xy = (\frac{1}{y})(\frac{1}{x})0 = 0$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto (b) se cumple.

La primera igualdad en (c) viene de:

$$(-x)y + xy = (-x + x)y = 0y = 0$$

combinando con 1.14(c); la otra parte de (c) es probada similarmente.

Finalmente:

$$(-x)(-y) = -[x(-y)] = -[-(xy)] = xy$$

por (c) y 1.14(d).

1.17. Definición

Un *campo ordenado* es un campo F, el cual es también un conjunto ordenado, tal que:

1. $x + y < x + z$ si $x, y, z \in F$ y $y < z$.
2. $xy > 0$ si $x \in F$, $y \in F$, $x > 0$ y $y > 0$.

Si $x > 0$, llamamos x positivo; si $x < 0$, x es negativo.

Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es un campo ordenado.

Todas las reglas familiares para el trabajo con desigualdades aplicadas a todos los campos ordenados: Multiplicación por positios [negativos] las cantidades se preservan [inversos] desigualdades, el cuadrado no es negativo, etc.

La siguiente proposición listada es acerca de esto.

1.18. Proposición

Los siguientes enunciados son verdaderos para todo campo ordenado:

- (a) Si $x > 0$ entonces $-x < 0$ y viceversa.
- (b) Si $x > 0$ y $y < z$ entonces $xy < xz$.
- (c) Si $x < 0$ y $y < z$ entonces $xy > xz$.
- (d) Si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$. En particular, $1 > 0$.
- (e) Si $0 < x < y$ entonces $0 < 1/y < 1/x$.

Prueba (a) Si $x > 0$ entonces $0 = -x + x > -x + 0$, así que $-x < 0$. Si $x < 0$ entonces $0 = -x + x < -x + 0$, tenemos que $-x > 0$. Esto prueba (a).

(b) Dado $z > y$, tenemos, $z - y > y - y = 0$, así que $x(z - y) > 0$ y por lo tanto:

$$xz = x(z - y) + xy > 0 + xy = xy$$

(c) Por (a),(b) y la proposición 1.16(c):

$$-[x(z - y)] = (-x)(z - y) > 0$$

Así que $x(z - y) < 0$, dado que $xz < xy$.

(d) Si $x > 0$, por lo la parte (ii) de al definición (1.17) dados $x^2 > 0$. Si $x < 0$, entonces $-x > 0$, así que $(-x)^2 > 0$. Pero $x^2 = (-x)^2$, por proposición 1.16(d). Ya que $1 = 1^2$, $1 > 0$.

(e) Si $y < 0$ y $v \leq 0$, entonces $yv \leq 0$. Pero $y(\frac{1}{y}) = 1 > 0$. Por lo tanto $\frac{1}{y} > 0$, del mismo modo,$\frac{1}{x} > 0$. Si multiplicamos ambos lados de la desigualdad $x < y$ por la cantidad positiva $(1/x)(1/y)$ obtenemos $1/y < 1/x$.

El campo real

Ahora estaremos en el teorema de la existencia el cual es el centro del capítulo.

1.19. Teorema

Existe un campo ordenado $\mathbb{R}$ el cual tiene la mínima cota superior propia.

Más ún, $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$ como un subcampo. El segundo estado dice que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y que las operaciones de suma y

multiplicación en $\mathbb{R}$, cuando aplicamos a los miembros de $\mathbb{Q}$, coinciden las operaciones usuales en los números racionales; también, los números racionales positivos coinciden con los elementos positivos de $\mathbb{R}$. Los miembros de $\mathbb{R}$ son llamados los *números reales*.

La prueba del teorema 1.19 es muy larga y es un poco tediosa y por tanto es presentada en el ápéndice al capítulo 1 (El cual yo no traduciré). La prueba actualmente construye $\mathbb{R}$ desde $\mathbb{Q}$.

El siguiente teorema puede ser extraído desde esa contrucción con un pequeño esfuerzo extra. De cualquier modo, preferimos derivarlo desde el Teorema 1.19 ya que esta provisto de una buena ilustración delq ue no puede hacerlo con la mínima cota superior propia.

1.20. Teorema

- (a) Si $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, entonces hay un entero positivo n tal que:

$$nx > y$$

- (b) Si $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces existe un $p \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < y$.

La parte (a) es usualmente referida como la *propiedad arquimediana* de $\mathbb{R}$.

La parte (b) puede ser dicho que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$: entre dos númros reales hay un racional.

Prueba

(a) Sea A el conjunto de todas las nx, donde n corre en los enteros positivos. Si (a) fuera falso, entonces y debe ser una cota superior de A. Peo entonces A tine una mínima cota superior en $\mathbb{R}$. Sea $\alpha = sup$ A, ya que $x > 0$, $\alpha - x < \alpha$ y $\alpha - x$ no es una cota superior de A. Por lo tanto, $\alpha - x < mx$, para algún entero positivo m. Pero entonces, $\alpha < (m+1)x \in A$, lo cual es imposible, puesto que α es una cota superior de A.

(b) Ya que $x < y$, tenemos que $y - x > 0$ y (a) provee un entero positivo n talque:

$$n(y - x) > 1$$

Aplicando (a) de nuevo, para obtener enteros positivos m_1 y m_2 talque $m_1 > nx_1$, $m_2 > -nx$. Entonces:

$$-m_2 < nx < m_1$$

por lo tanto ha un entero m (con $-m_2 \leq m \leq m_1$) tal que

$$m - 1 \leq nx < m$$

si combinamos estas desigualdades, obtenemos:

$$nx < m \leq 1 + nx < ny$$

ya que $n > 0$, de ahí se sigue que:

$$x < \frac{m}{n} < y$$

Esto prueba (b), con p=m/n.

Debemos ahora probar la existencia de las n-ésimas raíces de los reales positivos. Esta prueba mostrará cómo la dificultad queda fuera en la introducción (irracionalidad de $\sqrt{2}$). puede ser manejado en $\mathbb{R}$.

1.21. Teorema

Para cada real $x > 0$ y cada entero $n > 0$ hay uno y solamente un real y tal que $y^n = x$.

Este número y es escrito como $\sqrt[n]{x}$ ó $x^{1/n}$.

Prueba

Que exista a lo más un tal y es claro, puesto que $x < y_1 < y_2$ entonces $y_1^n < y_2^n$. Sea E el conjunto que consiste de todos los números reales positivos t, tales que, $t^n < x$.

Si $t = x/(1+x)$ entonces $0 < t < 1$. Ya que $t^n < t < x$, con $t \in E$y e es no vacío.

Si $t > 1 + x$ entonces $t^n > t > x$, entonces $t \notin E$, $1 + x$ es una cota superior de E.

Por lo tanto el terorema 1.19 implica la existencia de

$$y = supE$$

Para probar que $y^n = x$ mostraremos que cada una de las desigualdades $y^n < x$ y $y^n > x$ llegan a una contradicción.

La identidad $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + ... + a^{n-1})$ da la desigualdad:

$$b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1}$$

cuando $0 < a < b$.

Supongamos $y^n < x$. Elegimos un n tal que $0 < n < 1$ y

$$h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}$$

Pongamos $a = y$, $b = y + h$. Entonces:

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < hn(y+1)^{n-1} < x - y^n$$

Entonces $(y+h)^n < x$ y $y + h \in E$, ya que $y + h > y$, esto contradice el hecho en que y sea la cota superior de E.

Supongamos $y^n > x$. Pero:

$$k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}$$

Entonces $0 < k < y$. Si $t \geq y - k$, concluímos que:

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n < kny^{n-1} = y^n - x$$

con $t^n > x$, $y \in E$. Se sigue que y-k es una cota superior de E.

Pero $y - k < y$, el cual contradice el hecho de que y es la mínima cota superior de E.

Por tanto $y^n = x$, y la prueba está completa.

Corolario

Si a y b son números reales positivos y n es un número entero positivo, entonces:

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$$

Prueba Sea $\alpha = a^{1/n}$, $\beta = b^{1/n}$. Entonces:

$$ab = \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n$$

ya que la multiplicación es comutativa. [Axioma (M2) de la definición 1.12].

La unicidad de la existencia en el teorema 1.21 muestra que:

$$(ab)^{1/n} = \alpha\beta = a^{1/n}b^{1/n}$$

1.22. Decimales

Concluímos esta sección obviando la relación entre los números reales y los decimales.

Sea $x > 0$ real. Sea n_0 de la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$). Teniendo elegidos $n_0, n_1, ..., n_{k-1}$, sea n_k el entero más largo tal que:

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + ... + \frac{n_k}{10^k} \leq x$$

Sea el conjunto de esos números

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + ... + \frac{n_k}{10^k} (k = 0, 1, 2, ...) \tag{5}$$

Entonces $\lambda = supE$. La serie (expansión)decimal de x es:

$$n_0 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \tag{6}$$

A la inversa, para cualquier decimal infinito (6) el conjunto E de números (5) es acotado superiormente y (6) es la expansión decimal de sup E.

Ya que nunca usamos decimales, no entraremos en detalle en esa discusión.

El sistema de los Números Reales Extendidos

1.23. Definición

El sistema de *los números reales extendidos* consiste de el campo de los reales $\mathbb{R}$ y dos símbolos, $+\infty$ y $-\infty$. Preservaremos el orden en $\mathbb{R}$ y definimos:

$$-\infty < x < +\infty$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Está claro que $+\infty$es una cota superior de todo subconjunto del sistema de los números reales extendidos y que para todo subconjunto no vacío tiene una mínima cota superior. Si, por ejemplo, E es un conjunto no vacío de los números reales el cual no está acotado superiormente en $\mathbb{R}$, entonces el $supE = +\infty$ en el sistema de los números reales extendidos.

Exactamente lo mismo se aplica para las cotas inferiores.

El sistema de los números reales no forman un campo, pero se acostumbra utilizar las siguientes convenciones:

1. Si x es real entonces

$$x+\infty=+\infty,\ x-\infty=-\infty,\ \frac{x}{+\infty}=\frac{x}{-\infty}=0$$

2. Si $x>0$ entonces $x\cdot(+\infty)=+\infty$, $x\cdot(-\infty)=-\infty$.
3. Si $x<0$ entonces $x\cdot(+\infty)=-\infty$, $x\cdot(-\infty)=+\infty$

Cuando es conveniente hacer distinción entre los números reales por un lado y los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ por el otro, los primeros se llaman *finitos.*

El campo de los complejos

1.24. Definción

Un *número complejo* es un *par ordenado* (a,b) de números reales. *.^{O}rdenado"* quiere decir que (a,b) y (b,a) son distintos si $a\neq b$. Sea $x=(a,b)$ y $y=(c,d)$ son números complejos. Escribimos $x=y$ si y sólo si $a=c$ y $b=d$. (Notemos que esta definición no es enteramente superficial; se piensa en la igualdad de los números racionales, representados como cocientes de enteros). Definimos:

$$x+y=(a+c,b+d)$$
$$xy=(ac-bd,ad+bc)$$

1.25. Teorema

Estas definiciones de suma y multiplicación vuelve al conjunto de todos los números complejos dentro de un campo, con (0,0) y (1,0) en el papel de 0 y 1 respectivamente.

Prueba Simplemente verificando los axiomas de campo, como los listados en la definición 1.12 (claro que usamos la estructura del campo de $\mathbb{R}$).

Sea $x=(a,b)$, $y=(c,d)$ y $z=(e,f)$:
(A1) Es claro.
(A2) $x+y=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=y+x$
(A3) $(x+y)+z=(a+c,b+d)+(e,f)=(a+c+e,b+d+f)=(a,b)+(c+e,d+f)=x+(y+z)$
(A4) $x+0=(a,b)+(0,0)=(a,b)=x$
(A5) Sea $-x=(-a,-b)$. Entonces x+(-x)=(0,0)=0.

(M1) Es claro.
(M2) $xy=(ac-bd,ad+bc)=(ca-db,da+cb)=yx$.
(M3) $(xy)z=(ac-bd,ad+bc)(e,f)=(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce)=(a,b)(ce-df,cf+de)=x(yz)$.
(M4) $1x=(1,0)(a,b)=(a,b)=x$
(M5) Si $x\neq 0$ entonces $(a,b)\neq(0,0)$, lo cual quiere decir que en al menos 1 de los números reales a,b es diferente de cero. Por lo tanto $a^2+b^2>0$, por la proposición 1.18(d) podemos definir:

$$\frac{1}{x}=(\frac{a}{a^a+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})$$

Entonces:

$$x\cdot\frac{1}{x}=(a,b)(\frac{a}{a^a+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})=(1,0)=1$$

(D) $x(y+z)=(a,b)(c+e,d+f)=(ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be)=(ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be)=xy+xz$.

1.26. Teorema

Para cualquier número real a y b tenemos:

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0),\ \text{(a,0)(b,0)=(ab,0)}$$

La prueba es trivial.

El teorema 1.26 muestra que los números complejos de la forma (a,0) tiene las mismas propiedades aritméticas como los correspondientes números reales a. Puede por lo tanto ser identificado (a,0) con a. Esta identificación nos da el campo real como un subcampo de el campo complejo.

El lector puede estar enterado de que tenemos definidos los números complejos sin referencia del misterio de la raíz cuadrada de -1. Ahora mostramos que la nota´ción (a,b) es equivalente a las más acostumbrada $a+bi$.

1.27. Definición

$$i = (0, 1)$$

1.28. Teorema

$$i^2 = -1$$

Prueba

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

1.29. Teorema

Si a y b son reales, entonces $(a, b) = a + bi$.
Prueba

$a + bi = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$

1.30. Definición

Si a,b son reales y $z = a + bi$, entonces los números complejos, $\overline{z} = a - bi$ es llamado *el conjugado de z*. Los números a y b son la parte real y la parte imaginaria de z, respectivamente.Ocasionalmente escribiremos:

$$a = Re(z), b = Im(z)$$

1.31. Teorema

Si z y w son complejos, entonces:

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $z + \overline{z} = 2Re(z)$, $z - \overline{z} = 2iIm(z)$
4. $z\overline{z}$ es real y positivo (excepto cuan $z = 0$)

Prueba (1),(2) y (3) con trivuales. Para probar (4), escribimos $z = a + bi$, y notemos que $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

1.32. Definición

Si z es un número complejo, el valor absoluto $|z|$ es el no negativo de la raíz cuadrada de $z\overline{z}$; esto es, $|z| = (z\overline{z})^2$.
La existencia y unicidad del $|z|$ seguidos del teorema 1.21 y la parte (d) del teorema 1.31.
Notemos que cuando x es real, entonces $\overline{x} = x$, por lo tanto $|x| = \sqrt{x^2}$. Este $|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si x¡0.

1.33. Teorema

Sea z y w números complejos. Entonces:

1. $|z| > 0$ al menos que z=0, $|0| = 0$
2. $|\overline{z}| = |z|$
3. $|zw| = |z||w|$
4. $|Rez| \leq |z|$
5. $|z + w| \leq |z| + |w|$

Prueba

(1) y (2) son triviales. Sea $z = a + bi$, $w = c + di$, los caules a,b,c,d son reales. Entonces:

$$|zw|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2|w|^2$$

ó $|zw|^2 = (|z||w|)^2$. Ahora (3) se sigue de la unicidad del teorema 1.21.

Para probar (3), notemos que $a^2 \leq a^2 + b^2$, ya que

$$|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Probar (4), notemos que $\overline{z}w$ es el conjugado de $z\overline{w}$ así que $z\overline{w} + \overline{z}w = 2Re(z\overline{w})$. Por lo tanto:

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} = |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |z|^2 \leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z^2| + 2|z||w| + |w|^2$$

Ahora para (5) seguimos, tomando las raíces cuadradas.

1.34. Notación

Si $x_1, ..., x_n$ son números complejos, escribimos:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

Concluímos esta sección con una importante desigualdad, la usualmente conocida como la *desigualdad de Schwarz*.

1.35. Teorema

Si $a_1, ..., a_n$ y $b_1, ..., b_n$ son números complejos, entonces:

$$|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2$$

Prueba

Sea $A = \sum |a_j|^2$, $B = \sum |b_j|$, $c = \sum a_j\overline{b_j}$ (en todas las sumatorias en esta prueba, j corre en los valores $1, ..., n$). Si B=0, entonces $b_1 = ... = b_n = 0$ y la conclusión es trivial. Asumimos por tanto que $B > 0$. Por el teorema 1.31 tenemos:

$$\sum |Ba_j - Cb_j|^2 = \sum (Ba_j - Cb_j)(B\overline{a_j} - \overline{Cb_j}) = B^2 \sum |a_j|^2 - B\overline{C} \sum a_j\overline{b_j} - BC \sum \overline{a_j} b_j + |C|^2 \sum |b_j|^2$$
$$= B^2 A - B|C|^2 = B(AB - |C|^2)$$

Ya que cada término en la primera suma es no negativo, nosostros vemos que:

$$B(AB - |C|^2) \geq 0$$

Ya que $B > 0$, se sigue que $AB - |C|^2 \geq 0$. Esta es la desigualdad deseada.

Espacios Euclideanos

1.36. Definición

Para cada entero positivo k, sea $\mathbb{R}^k$ el conjunto de todos los k-tuples ordenados:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_k)$$

donde $x_1, ..., x_k$ son números reales, llamdos *las coordenadas de x*. Los elementos de $\mathbb{R}^k$ son llamados *puntos o vectores*, especialmente cuando $x > 1$. Denotamos los vectores por letras negritas. Si $y = (y_1, ..., y_k)$ y α es un número real, escribimos:

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_k)$$

Así que $x + y \in \mathbb{R}^k$ y $\alpha x \in \mathbb{R}^k$. Esta definición de suma de vectores, como también multiplicación de un vector por un número real (un escalar). Estas dos operaciones satisfacen las leyes conmutativa, asociativa y distributiva (La prueba es trivial, en vista de las leyes análogas para los números reales) y hace de $\mathbb{R}^k$ un espacio vectorial sobre un campo real. El elemento cero de $\mathbb{R}^k$ (algunas veces llamadas *el vector origen o el vector nulo)* es el punto cero 0, cuya todas coordenadas son cero 0.

Además definimos el llamado "*producto interno*"(o *producto escalar*)de x y y por

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$

y la norma de x por:

$$|x| = (x \cdot x)^{1/2} = (\sum_{i=1}^{k} x_i^2)^{1/2}$$

La estructura ahora definida (el espacio vectorial $\mathbb{R}^k$ con el producto interno y norma) es llamado el *k-espacio euclideano.*

1.37. Teorema

Supóngase que $x, y, z \in \mathbb{R}^k$ y α es un real. Entonces :

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$
3. $|\alpha x| = |\alpha||x|$
4. $|x \cdot y| \leq |x||y|$
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$
6. $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$

Prueba

(1),(2) y (3) son obvias y (d) es consecuencia inmediata de la desigualda de Schwarz.Por (4) tenemos:

$$|x + y|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y \leq |x|^2 + +2|x||y| + |y|^2 = (|x|^2 + |y|^2)$$

Asi que (5) está probado. Finalmente (6) se sigue de (5) si reemplazamos x por $x - y$ y y por $y - z$.

1.38. Nota

El teorema 1.37 (1),(2), y (6) nos permitirá (ver el capítulo 2) observar $\mathbb{R}^k$ como un espacio métrico.

$\mathbb{R}^1$ (el conjunto de todos los números reales) es usualmente llamado *la recta o recta real.*Del mismo modo $\mathbb{R}^2$ es llamado el *plano o el plano complejo*(Comparar definiciones 1.24 y 1.36). En estos dos casos la norma es justo el valor absoluto de el real correspondiente o número complejo.