

1. Tarea: Leyes de cancelación

Demostrar que:

1. Si $a * b = a * c$ entonces $b=c$
2. Si $c * a = b * a$ entonces $b=c$
3. Las ecuaciones: $x * a = b$ y $a * x = b$ tienen solución única

3) Si $a * b = a * c$ entonces $b=c$

DEMOSTRACIÓN

Suponemos que $a * b = a * c$. Entonces:

$$b = e * b = (a * a^{-1}) * b = (a^{-1} * a) * b = a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c) = (a^{-1} * a) * c = e * c = c$$

4) Si $c * a = b * a$ entonces $b=c$

DEMOSTRACIÓN

Suponemos que $c * a = b * a$. Entonces:

$$c = c * e = c * (a * a^{-1}) = (c * a) * a^{-1} = (b * a) * a^{-1} = b * (a * a^{-1}) = b * e = b$$

3) Las ecuaciones:

$$x * a = b, a * x = b$$

son únicas.

DEMOSTRACIÓN

Consideremos la ecuación $x * a = b$. Tomemos $x := b * a^{-1}$.

Entonces:

$$(b * a^{-1}) * a = b * (a^{-1} * a) = b * e = b$$

Luego, $x = b * a^{-1}$ es solución de la ecuación $x * a = b$. Además ésta es única, pues si x_1, x_2 existieran, soluciones de la ecuación $x * a = b \Rightarrow x_1 * a = b = x_2 * a$

Por las leyes de cancelación, se tiene que $x_1 = x_2$.

Por lo tanto, la ecuación $x * a = b$ tiene solución única.

Similarmente se tiene la misma afirmación para la ecuación $a * x = b$, donde la solución es $x = a^{-1} * b$.

2. Estudio de espacios vectoriales

Definición

Sea \mathbb{K} un cuerpo de escalares, y V un conjunto no vacío, con reglas de suma y producto por escalar que asignan a cada par $u, v \in V$ una suma $u + v \in V$ y a cada par $u \in V, k \in \mathbb{K}$ un producto $ku \in V$.

V recibe el nombre de *espacio vectorial sobre \mathbb{K}* (y los elementos de V se llaman *vectores*). Si se satisfacen los siguientes axiomas:

- (A_1) Para toda terna de vectores $u, v, w \in V$, $(u + v) + w = u + (v + w)$.
- (A_2) Existe un vector en V , denotado por 0 y denominado vector 0 , tal que $u + 0 = u$ para todo vector $u \in V$.
- (A_3) Para todo vector $u \in V$ existe un único vector en V , denotado por $-u$, tal que $u + (-u) = 0$.
- (A_4) Para todo par de vectores $u, v \in V$, $u + v = v + u$.
- (M_1) Para todo escalar $k \in \mathbb{K}$ y todo par de vectores $u, v \in V$, $k(u + v) = ku + kv$.
- (M_2) Para todo par de escalares $a, b \in \mathbb{K}$ y todo vector $v \in V$, $(a + b)u = au + bu$.
- (M_3) Para todo par de escalares $a, b \in \mathbb{K}$ y todo vector $v \in V$, $(ab)u = a(bu)$.
- (M_4) El escalar unidad $1 \in \mathbb{K}$ cumple $1u = u$ para todo vector $u \in V$.

V es un grupo conmutativo bajo la suma (grupo abeliano).

De ello se deriva que cualquier suma de vectores de la forma:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_m$$

no requiere paréntesis y no depende del orden de los sumandos, que el vector 0 es único, que el opuesto $-u$ de u es único y que se verifica la ley de cancelación; esto es, para tres vectores cualesquiera $u, v, w \in V$:

$$u + w = v + w \Rightarrow u = v$$

Asimismo, la resta se define según:

$$u - v = u + (-v)$$

Por otra parte, los cuatro axiomas restantes se refieren a la "acción" del cuerpo \mathbb{K} sobre V .

Obsérvese que la rotulación de los axiomas refleja este desdoblamiento. Empleando estos axiomas adicionales probaremos las siguientes propiedades elementales de un espacio vectorial.

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} .

1. Para todo escalar $k \in \mathbb{K}$ y $0 \in V$, $k0 = 0$.
2. Para todo $0 \in \mathbb{K}$ y todo vector $u \in V$, $0u = 0$.
3. Si $ku = 0$, donde $k \in \mathbb{K}$ y $u \in V$, entonces $k=0$ o $u=0$.
4. Para todo $k \in \mathbb{K}$ y todo $u \in V$, $(-k)u = k(-u) = -ku$.

1.5 Ejercicios

22 de marzo de 2003

Alumno: Real Bermúdez Jesús M.

1. Determine cuales de los siguientes conjuntos es un grupo:

a) Números pares con la suma.

Solución

Si consideramos que n es número par, entonces; el conjunto de los números pares con la suma es un grupo, además es un grupo abeliano, puesto que:

- 1) Dada la operación suma en los número pares es asociativa, para cada $a, b, c \in \text{Pares}$.
- 2) Existe una única identidad denotada como 0 , tal que $\forall a \in \text{Pares}$ entonces: $a + 0 = a$.
- 3) Existe un único inverso, talque $\forall a \in \text{Pares}$ entonces: $a - a = 0$.

b) Las raíces reales y complejas del polinomio $x^n - 1$, con respecto al producto.

Solución

Sus raíces vienen dadas por $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ con $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Sea A el conjunto de todas las raíces del polinomio $x^n - 1$, con $A = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$

1) Veamos que: $\forall \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in A$ tal que

$$\begin{aligned}\omega_1 \cdot (\omega_2 \cdot \omega_3) &= e^{\frac{2k\pi i}{n}} (e^{\frac{2m\pi i}{n}} e^{\frac{2p\pi i}{n}}) = e^{\frac{2k\pi i}{n}} (e^{\frac{2\pi i(m+p)}{n}}) \\ &= e^{\frac{2\pi i[k+(m+p)]}{n}} = e^{\frac{2\pi i[(k+m)+p]}{n}} = e^{\frac{2\pi i(k+m)}{n}} e^{\frac{2\pi ip}{n}} = (e^{\frac{2\pi ik}{n}} e^{\frac{2\pi im}{n}}) e^{\frac{2\pi ip}{n}} \\ &= (\omega_1 \cdot \omega_2) \cdot \omega_3\end{aligned}$$

2) Vemos que tiene identidad por la izquierda, ya que:

$$e = e^{\frac{2\pi(0)i}{n}} \text{ comprobemos que este es realmente la identidad: Sea } \omega_1 = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$$

$$e^{\frac{2\pi i(0)}{n}} e^{\frac{2\pi ik}{n}} = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$$

por lo tanto, el producto de raíces complejas tiene identidad por la izquierda. (que se verá que es la misma para la derecha)

3) Vemos que: $\forall \omega \in \mathbb{C}$ existe un inverso por la izquierda, el cual es: ω^{-1} .

$$\text{Sea } \omega = e^{\frac{2\pi ik}{n}} \text{ y } \omega^{-1} = e^{\frac{-2\pi ik}{n}} \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{2\pi ik}{n}} e^{\frac{-2\pi ik}{n}} = e^{\frac{2\pi i(k-k)}{n}} = e^{\frac{2\pi i(0)}{n}} = \cos \frac{2(0)\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2(0)\pi}{n} = \cos \frac{2(0)\pi}{n} = 1$$

por lo tanto, el producto de raíces reales y complejas tienen inverso.

por lo tanto, las raíces reales y complejas del polinomio $x^n - 1$, con respecto al producto es un grupo.

c) Los números reales no negativos con la operación definida como $a * b = a^2 * b^2$

Solución

Sea $G = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

1) Vemos que la función no es asociativa: Sea $a, b, c \in G$ tal que : $(a * b) * c = (a^2 * b^2) * c = (a^2 * b^2)^2 * c^2 = (a^4 * b^4) * c^2 \neq a * (b * c) = a * (b^2 * c^2) = a^2 * (b^2 * c^2)^2$

Por lo tanto, los números reales no negativos con la operación definida no es un grupo.

d) Los números reales positivos con la operación definida como $a * b = a^2 * b^2$

Solución

Sea $\mathbb{R}^+ = \{1, 2, \dots, n\}$

La operación definida en este ejercicio no es asociativa, por el ejercicio anterior.

Por lo tanto, los números reales positivos con esta operación no es un grupo.

e) Las funciones biyectivas del conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ en sí mismo, con respecto a la composición.

Solución

Sea $A(S)$ el conjunto de todas las biyecciones $S \rightarrow S$. Bajo la operación de composición de funciones, $f \circ g$, $A(S)$ es un grupo, ya que la composición es asociativa, la composición de biyecciones es una biyección, 1_s es una biyección, y toda biyección tiene inverso. Si $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, entonces $A(S)$ es el grupo simétrico en n y es denotada por S_n .

2. Sea G un conjunto no vacío, $\circ : G \times G \rightarrow G$ una operación binaria que satisface:

a) \circ es asociativa

b) Para todo $a, b \in G$, las ecuaciones $a \circ x = b$ y $x \circ a = b$ tienen solución en G .

Demuestre que (G, \circ) es grupo.

Demostración

a) Debemos ver que la función definida es asociativa, pero esto se tiene por hipótesis.

b) Veamos que tiene identidad por la izq., es decir, $\exists x_1 \in G$ tal que $\forall a \in G$ $x_1 \circ a = a$
Definamos la función f como:

$$f : G \rightarrow G$$

$$f(x) : x \circ a \forall x \in G$$

Veamos qué propiedades cumple este función.

Veamos si f es inyectiva.

Probemos que $f(x) = f(y) \rightarrow x = y$

$$f(x) = x \circ a = y \circ a = f(y)$$

$$x \circ a = y \circ a$$

por leyes de cancelación esto implica que $x = y$

Por tanto f es inyectiva.

Veamos que f es suprayectiva.

f es suprayectiva si $\forall g' \in G$ $g \in G$ tal que $g' = f(g)$ pero:

$$g' = f(g) = g \circ a$$

$$g' = g \circ a$$

$$g \circ a = b \forall a, b \in G$$

Puesto que $g \circ a = b$ tiene solución única en G entonces:

$$f(x) = x \circ a$$

es biyectiva.

Ahora veamos que existe identidad por la izquierda:

Sea $g \in G$ fijo tal que $f_g(x) = x \circ g$ entonces existe $e \in G$ tal que

$$f_g(e) = e \circ g = g$$

Sea $b \in G$ $b = g \circ a \forall a \in G \Rightarrow e \circ b = b$ entonces como

$$\circ : G \times G$$

$$e \circ g \circ a = e \circ b \mapsto g \circ a = b$$

esto garantiza que existe identidad por izquierda $\forall a \in G$.

Ahora veamos que existe identidad por derecha

Sea $g' \in G$ fijo tal que $f_{g'}(x) = g' \circ x$ entonces existe $e' \in G$ tal que

$$f_{g'}(e') = g' \circ e'$$

Sea $b \in G$ $b = g' \circ a \in G \Rightarrow b \circ e' = b$ entonces como

$$\circ : G \times G$$

$$g' \circ a \circ e' = b \circ e' \mapsto g' \circ a = b$$

esto garantiza que existe identidad por derecha $\forall a \in G$. entonces

$$f_{g'}(e') = g' \circ e' = g'$$

$$e' = f_{e'}(e) = f_e(e') = e \circ e' = e$$

$$e' = f_{e''} = e' \circ e = e$$

por tanto existe identidad por la izquierda y es igual a la identidad por la derecha.

c) Ahora veamos que existen los inversos para cada elemento de G .

$$a \circ x = b \tag{1}$$

$$x \circ a = b \tag{2}$$

Entonces, sea $g \in G$ tal que por 4) $x \circ g = g$ tiene solución y es: $x = e$

Ahora $\forall b \in G$ por 3) $g \circ x = b$ tiene solución:

$$e \circ b = e \circ (g \circ x) = (e \circ g) \circ x = g \circ x = b$$

$\forall b \in G$ existe identidad izquierda.

Por 4) $x \circ b = e$ tiene solución y existe su inverso izquierdo.

Sea b' inverso izquierdo de b y b'' inverso izquierdo de b' tal que:

$$b' \circ b = e = b'' \circ b'$$

$$b \circ b' = e \circ (b \circ b') = (b'' \circ b')(b \circ b') = b'' \circ (b' \circ b) \circ b' = b''(e \circ b') = b'' \circ b' = e$$

$$\text{luego } b \circ e = b \circ (b' \circ b) = (b \circ b') \circ b = (e \circ b) = b.$$

Puesto que $e \circ b = b \circ e = b \forall b \in G$. Entonces existe b' tal que $b' \circ b = b \circ b' = e$. Por tanto G es grupo.

q.e.d

3. Sea G un conjunto finito no vacío, $\circ : G \times G \rightarrow G$ una operación binaria que satisfice:

- a) \circ es asociativa.
 b) Se cumplen las leyes de cancelación, es decir:
 1) Para todas $a, b, c \in G$, $a \circ b = a \circ c \Rightarrow b = c$.
 2) Para todas $a, b, c \in G$, $b \circ a = c \circ a \Rightarrow b = c$.

Demuestre que (G, \circ) es grupo.

Demostración

Debemos mostrar que:

\circ es asociativa; pero esta propiedad se cumple por hipótesis.

Sólo nos basta probar que tiene identidad por la izquierda e inverso por la izquierda.

Definamos las funciones como:

$$f : G \rightarrow G$$

tal que

$$f_a(x) = x \circ a \forall x \in G$$

$$f_{a'}(x) = a \circ x \forall x \in G$$

Vemos que tiene como propiedades:

- 1) Es inyectiva: ya que Si $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) = x \circ a = f(y) = y \circ a$
 $x \circ a = y \circ a$ por leyes de cancelación $\Rightarrow x = y$. Por lo tanto, f es inyectiva
 2) Es biyectiva: ya que el conjunto es finito y las función $f : G \rightarrow G \Rightarrow$ que f es suprayectiva.
 Por tanto tenemos que la función f es biyectiva. Igualmente se demuestra que la segunda función definida también es biyectiva.

Ahora veamos que existe identidad por la izquierda:

Sea $g \in G$ fijo tal que $f_g(x) = x \circ g$ entonces existe $e \in G$ tal que

$$f_g(e) = e \circ g = g$$

Sea $b \in G$ $b = g \circ a \forall a \in G \Rightarrow e \circ b = b$ entonces como

$$\circ : G \times G$$

$$e \circ g \circ a = e \circ b \mapsto g \circ a = b$$

esto garantiza que existe identidad por izquierda $\forall a \in G$.

Ahora veamos que existe identidad por derecha

Sea $g' \in G$ fijo tal que $f_{g'}(x) = g' \circ x$ entonces existe $e' \in G$ tal que

$$f_{g'}(e') = g \circ e'$$

Sea $b \in G$ $b = g \circ a \in G \Rightarrow b \circ e' = b$ entonces como

$$\circ : G \times G$$

$$g \circ a \circ e' = b \circ e' \mapsto g \circ a = b$$

esto garantiza que existe identidad por derecha $\forall a \in G$. entonces

$$f_{g'}(e') = g' \circ e' = g'$$

$$e' = f_{e'}(e) = f_e(e') = e \circ e' = e$$

$$e' = f_{e'}(e) = e' \circ e = e$$

por tanto existe identidad por la izquierda y es igual a la identidad por la derecha.

Ahora veamos que existen los inversos para cada elemento de G .

$$a \circ x = b$$

(3)

$$x \circ a = b \tag{4}$$

Entonces, sea $g \in G$ tal que por 4) $x \circ g = g$ tiene solución y es: $x = e$

Ahora $\forall b \in G$ por 3) $g \circ x = b$ tiene solución:

$$e \circ b = e \circ (g \circ x) = (e \circ g) \circ x = g \circ x = b$$

$\forall b \in G$ existe identidad izquierda.

Por 4) $x \circ b = e$ tiene solución y existe su inverso izquierdo.

Sea b' inverso izquierdo de b y b'' inverso izquierdo de b' tal que:

$$b' \circ b = e = b'' \circ b'$$

$$b \circ b' = e \circ (b \circ b') = (b'' \circ b')(b \circ b') = b'' \circ (b' \circ b) \circ b' = b''(e \circ b') = b'' \circ b' = e$$

$$\text{luego } b \circ e = b \circ (b' \circ b) = (b \circ b') \circ b = (e \circ b) = b.$$

Puesto que $e \circ b = b \circ e = b \forall b \in G$. Entonces existe b' tal que $b' \circ b = b \circ b' = e$. Por tanto G es grupo.

q.e.d

4. Demuestre, con un ejemplo, que en el ejercicio anterior no se puede suprimir la hipótesis "G conjunto finito"

Demostración

Los enteros, los racionales y los números reales son cada uno grupos abelianos infinitos bajo la suma ordinaria. Cada uno tiene asociatividad e identidad (por izquierda y por derecha) bajo la multiplicación, pero no un grupo (El 0 no tiene inverso). Como siempre los elementos no cero de los racionales y los reales respectivamente forman grupos abelianos bajo la multiplicación. Los enteros pares bajo la multiplicación tienen esta función asociativa pero no tienen identidad.

q.e.d

5. Sea G un grupo tal que $a^2 = e$ para cada $a \in G$. Demuestre que G es Abeliano.

Demostración

Sean $a, b \in G \Rightarrow (ab)(ab) = e$

puesto que esto es de la forma:

$a^2 \Rightarrow (ab)(ab) = e \Rightarrow ab = (ab^{-1}) = b^{-1}a^{-1}$ pero como $a^2 = e$ y $b^2 = e$,

entonces $a = a^{-1}$ y $b = b^{-1} \Rightarrow ab = b^{-1}a^{-1} = ba$

q.e.d

6. Sea G grupo finito con un número par de elementos, demuestre que $a \in G$, $a \neq e$ tal que $a^2 = e$.

Demostración

Como $o(G) = 2n$ entonces $\forall a \in G$

$2n > 1$ y $a^{2n} = e \Rightarrow o(a) | o(G) \Rightarrow$ existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $2n = o(a)q + r$ con $r = 0$ ya que $o(a) | 2n$.

Entonces :

$$\begin{aligned} 2n = o(a)q &\Rightarrow 2 = o(a)\frac{q}{n} \\ \Rightarrow a^2 = a^{o(a)\frac{q}{n}} &= (a^{o(a)})^{\frac{q}{n}} = (e)^{\frac{q}{n}} = e \end{aligned}$$

Por tanto $a^2 = e$

Por tanto Si G es un grupo finito con un número par de elementos vemos que existe $a \in G$, $a \neq e$, tal que $a^2 = e$.

7. Sea G grupo, $a, b \in G$. Suponga que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $b \cdot a \cdot b^{-1} = a^r$. Demuestre que $b^j \cdot a \cdot b^{-j} = a^{r^j} \forall j \in \mathbb{N}$.

Demostración

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} | b^j \cdot a \cdot b^{-j} = a^{r^j}\}$

Procedamos por inducción sobre n .

- a) $1 \in A$ se cumple por hipótesis
- b) Suponemos que es válido para $n=k \Rightarrow b^k \cdot a \cdot b^{-k} = a^{r^k}$
- c) Por demostrar que $b^{k+1} \cdot a \cdot b^{-(k+1)}$

$$a^{r^{k+1}} = a^{r \cdot r^k} = \left(a^{r^k}\right)^r = (b^k \cdot a \cdot b^{-k})^r$$

$$= \underbrace{(b^k \cdot a \cdot b^{-k}) \cdot (b^k \cdot a \cdot b^{-k}) \cdot \dots \cdot (b^k \cdot a \cdot b^{-k}) \cdot (b^k \cdot a \cdot b^{-k})}_{r\text{-veces}}$$

$r\text{-veces}$

$$= b^k \cdot a^r \cdot b^{-k} = b^k \cdot b \cdot a \cdot b^{-1} \cdot b^{-k} = b^{k+1} \cdot a \cdot b^{-(k+1)}$$

Por lo tanto, si G grupo, $a, b \in G$. Existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $b \cdot a \cdot b^{-1} = a^r$. Entonces $b^j \cdot a \cdot b^{-j} = a^{r^j} \forall j \in \mathbb{N}$.

q.e.d

8. Demuestre que el conjunto de funciones $\left\{x, 1-x, \frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}, \frac{x}{x-1}, \frac{x-1}{x}\right\}$ es un grupo con la composición.

Demostración

\circ	x	$1-x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x-1}{x}$
x	x	$1-x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x-1}{x}$
$1-x$	$1-x$	x	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x-1}{x}$	x	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	$1-x$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{x}$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x-1}{x}$	$1-x$	x	$\frac{1}{x}$
$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	x	$1-x$	$\frac{1}{1-x}$

- a) Puesto que la composición de funciones es asociativa, por tanto esta función es asociativa bajo la composición de funciones.
- b) Existe una única identidad por la izquierda que es igual a la identidad por la derecha, y ésta es la x .
- c) Existe inverso por la izquierda para todo elemento de dicho conjunto y estos son:

$$x = x^{-1} \text{ ya que } x \circ x = x$$

$$1-x = (1-x)^{-1} \text{ ya que } (1-x) \circ (1-x) = x$$

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-1} \text{ ya que } \left(\frac{1}{x}\right) \circ \left(\frac{1}{x}\right) = x$$

$$\frac{1}{1-x} = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{-1} \text{ ya que } \left(\frac{x-1}{x}\right) \circ \left(\frac{1}{1-x}\right) = x$$

$$\left(\frac{x}{x-1}\right) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{-1} \text{ ya que } \left(\frac{x}{x-1}\right) \circ \left(\frac{x}{x-1}\right) = x$$

$$\left(\frac{x-1}{x}\right) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-1} \text{ ya que } \left(\frac{1}{1-x}\right) \circ \left(\frac{x-1}{x}\right) = x$$

Por tanto el conjunto de funciones arriba descritas forman un grupo bajo la composición de funciones.

q.e.d

9. Sea \mathbb{R}^* con la operación binaria $a * b = |a|b$, demostrar que:

- a) La operación es asociativa.
- b) Tiene identidad izquierda.
- c) Cada elemento del conjunto tiene un inverso por la derecha.

Por lo anterior ¿Puede garantizar que el conjunto con la operación considerada, es un grupo? argumente su respuesta.

Demostración

(a) Sea $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ entonces:

$$a * (b * c) = a * (|b|c) = |a||b|c$$

$$(a * b) * c = (|a|b) * c = ||a|b| * c = ||a|b|c = |a||b|c$$

Por tanto $a * (b * c) = (a * b) * c$

Por lo tanto la operación es asociativa.

(b) Veamos que existe identidad por la izquierda, es decir: $e * a = a \forall a \in \mathbb{R}^*$.

Sea $e \in \mathbb{R}^*$ tal que $|e| = 1$ y $e * a = a \Rightarrow e * a = |e|a = ea = a \forall a \in \mathbb{R}^*$

Por lo tanto e es la identidad por la izquierda de $a \forall a \in \mathbb{R}^*$.

(c) Veamos que existe inverso por la derecha, es decir: $a * b = e \forall a \in \mathbb{R}^*$.

Sea $a \in \mathbb{R}^*$. Definimos $b = |a|^{-1}$

$$a * b = e \Rightarrow a * b = |a||a|^{-1} = |a||a^{-1}| = |aa^{-1}| = |e| = e \Rightarrow a * b = e \forall a \in \mathbb{R}^*$$

Por lo tanto $a^{-1} = b = |a|^{-1}$

Por lo tanto cada elemento del conjunto tiene inverso por la derecha.

q.e.d

Respuesta a la pregunta

Con esta información no se puede afirmar que sea grupo, ya que la definición 3 de las notas dice: G es grupo si $*$: $G \times G \rightarrow G$ operación binaria, $e \in G$ si:

- a) $*$: $G \times G \rightarrow G$ es asociativa, lo cual se demostró.
- b) $e \in G$ es identidad por la izquierda o elemento neutro por la izquierda, esto es, $e * g = g \forall g \in G$, lo cual también se demostró.
- c) Dado $b \in G$ existe $a \in G$ tal que $a * b = e$ (existencia del inverso por la izquierda).

Por lo cual no se puede garantizar, ya que la existencia del inverso se garantiza pero por la derecha y entonces se debería demostrar que existe elemento neutro ó identidad por la derecha.

Por lo tanto no se puede afirmar que \mathbb{R}^* con la operación binaria dada sea grupo.

Ejercicios

Para cada función encuentre su función inversa

1. La función inversa del conjunto $G_1 = \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ de las raíces $\alpha \neq 1, -1$ del polinomio $x^4 - 1$ es:

Solución

$$1 = 1^{-1} \text{ ya que } 1 \times 1 = 1$$

$$\alpha^{-1} = \alpha^3 \text{ ya que } \alpha \times \alpha^3 = 1 = e^{\frac{2\pi i}{4}} \times e^{\frac{2\pi(3)i}{4}} = e^{\frac{2\pi i(1+3)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(4)}{4}} = e^{2\pi i} = 1$$

$$(\alpha^2)^{-1} = \alpha^2 \text{ ya que } \alpha^2 \times \alpha^2 = 1 = e^{\frac{2\pi i(2)}{4}} \times e^{\frac{2\pi(2)i}{4}} = e^{\frac{2\pi i(2+2)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(4)}{4}} = e^{2\pi i} = 1$$

$$(\alpha^3)^{-1} = \alpha \text{ ya que } \alpha^3 \times \alpha = 1 = e^{\frac{2\pi i(3)}{4}} \times e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{\frac{2\pi i(3+1)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(4)}{4}} = e^{2\pi i} = 1$$

2. Encontrar la función inversa de las rotaciones de $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ y 360° .

Llamemos $T_1 = a$ la rotación de 90°

Llamemos $T_2 = a$ la rotación de 180°

Llamemos $T_3 = a$ la rotación de 270°

Llamemos $I = a$ la rotación de 360°

$$I = I^{-1} \text{ ya que } I \circ I = I$$

$$(T_3)^{-1} = T_1 \text{ y } T_3 = (T_1)^{-1} \text{ ya que } T_3 \circ T_1 = I \text{ y } T_1 \circ T_3 = I$$

$$(T_2)^{-1} = T_2 \text{ ya que } T_2 \circ T_2 = I$$

3. $S_3 = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ es biyectiva}\}$. Encontrar su función inversa.

Ellos mismos son su propio inverso.

$\sigma_1 = \sigma_1^{-1}$	ya que	$\sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_1$
$\sigma_2 = \sigma_2^{-1}$	ya que	$\sigma_2 \circ \sigma_2 = \sigma_1$
$\sigma_3 = \sigma_3^{-1}$	ya que	$\sigma_3 \circ \sigma_3 = \sigma_1$
$\tau_1 = \tau_1^{-1}$	ya que	$\tau_1 \circ \tau_1 = \sigma_1$
$\tau_2 = \tau_2^{-1}$	ya que	$\tau_2 \circ \tau_2 = \sigma_1$
$\tau_3 = \tau_3^{-1}$	ya que	$\tau_3 \circ \tau_3 = \sigma_1$

De los ejemplos preliminares vea que propiedades satisfacen las operaciones definidas en sus respectivos conjuntos.

1. Consideremos la raíz $\alpha \neq 1, -1$, del polinomio:

$$x^4 - 1$$

tenemos que el conjunto:

$$G_1 = \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$$

Veamos que es asociativa la operación:

$$(e^{\frac{2\pi(0)i}{4}} e^{\frac{2\pi i}{4}}) e^{\frac{2\pi(2)i}{4}} = (e^{\frac{2\pi i(0+1)}{4}}) e^{\frac{2\pi(2)i}{4}} = e^{\frac{2\pi i[(0+1)+2]}{4}} = e^{\frac{2\pi i[0+(1+2)]}{4}} = e^{\frac{2\pi i 0}{4}} (e^{\frac{2\pi i(1+2)}{4}}) = e^{\frac{2\pi i(0)}{4}} (e^{\frac{2\pi i(1)}{4}} e^{\frac{2\pi i(2)}{4}})$$

$$(e^{\frac{2\pi(0)i}{4}} e^{\frac{2\pi i}{4}}) e^{\frac{2\pi(3)i}{4}} = (e^{\frac{2\pi i(0+1)}{4}}) e^{\frac{2\pi(3)i}{4}} = e^{\frac{2\pi i[(0+1)+3]}{4}} = e^{\frac{2\pi i[0+(1+3)]}{4}} = e^{\frac{2\pi i(0)}{4}} (e^{\frac{2\pi i(1+3)}{4}}) = e^{\frac{2\pi i(0)}{4}} (e^{\frac{2\pi i(1)}{4}} e^{\frac{2\pi i(3)}{4}})$$

$$(e^{\frac{2\pi i}{4}} e^{\frac{2\pi(2)i}{4}}) e^{\frac{2\pi(3)i}{4}} = (e^{\frac{2\pi i(1+2)}{4}}) e^{\frac{2\pi(3)i}{4}} = (e^{\frac{2\pi i[(1+2)+3]}{4}}) e^{\frac{2\pi i[1+(2+3)]}{4}} = e^{\frac{2\pi i}{4}} (e^{\frac{2\pi i(2+3)}{4}}) = e^{\frac{2\pi i}{4}} (e^{\frac{2\pi(2)i}{4}} e^{\frac{2\pi i(3)}{4}})$$

Por lo tanto la operación es asociativa.

Veamos si la operación es conmutativa:

$$1\alpha = e^{\frac{2\pi(0)i}{4}} e^{\frac{2\pi(1)i}{4}} = e^{\frac{2\pi i(0+1)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(1+0)}{4}} = e^{\frac{2\pi i}{4}} e^{\frac{2\pi(0)i}{4}} = \alpha 1$$

$$\alpha\alpha^2 = e^{\frac{2\pi i(1)}{4}} e^{\frac{2\pi i(2)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(1+2)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(2+1)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(2)}{4}} e^{\frac{2\pi i(1)}{4}} = \alpha^2\alpha$$

$$\alpha^2\alpha^3 = e^{\frac{2\pi i(2)}{4}} e^{\frac{2\pi i(3)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(2+3)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(3+2)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(3)}{4}} e^{\frac{2\pi i(2)}{4}} = \alpha^3\alpha^2$$

$$1\alpha^3 = e^{\frac{2\pi i(0)}{4}} e^{\frac{2\pi i(3)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(0+3)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(3+0)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(3)}{4}} e^{\frac{2\pi i(0)}{4}} = \alpha^3 1$$

$$1\alpha^2 = e^{\frac{2\pi i(0)}{4}} e^{\frac{2\pi i(2)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(0+2)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(2+0)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(2)}{4}} e^{\frac{2\pi i(0)}{4}} = \alpha^2 1$$

$$\alpha\alpha^3 = e^{\frac{2\pi i(1)}{4}} e^{\frac{2\pi i(3)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(1+3)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(3+1)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(3)}{4}} e^{\frac{2\pi i(1)}{4}} = \alpha^3\alpha$$

La operación es conmutativa $\forall \alpha \in G_1$

Tiene identidad por la derecha y por la izquierda que es la misma por los dos lados: y ésta es

$$e^{\frac{2\pi i(0)}{4}} = 1 \text{ ya que } e^{\frac{2\pi i(0)}{4}} e^{\frac{2\pi ki}{4}} = e^{\frac{2\pi i(0+k)}{4}} = e^{\frac{2\pi ik}{4}} \quad \forall k = 0, 1, 2, 3.$$

Tiene inverso por la derecha y por la izquierda que es la misma por los dos lados y ésta es:

$$e^{-\frac{2\pi ki}{4}} \text{ ya que } (e^{\frac{2\pi ki}{4}}) e^{-\frac{2\pi i(k-k)}{4}} = e^{\frac{2\pi i(0)}{4}} = 1 \quad \forall k = 0, 1, 2, 3.$$

2. El conjunto de las rotaciones donde:

$T_1 = a$ la rotación 90°

$T_2 = a$ la rotación 180°

$T_3 = a$ la rotación de 270°

$I = a$ la rotación de 360°

Veamos que propiedades cumple:

a) La operación composición de funciones es asociativa bajo el conjunto $G = \{T_1, T_2, T_3, I\}$.

b) $G = \{T_1, T_2, T_3, I\}$ tienen identidad por la izquierda y por la derecha, y además es igual la izquierda que la derecha $\forall T_1, T_2, T_3, I \in G$

Identidad por derecha	Identidad por Izquierda
$T_1 \circ I = T_1$	$I \circ T_1 = T_1$
$T_2 \circ I = T_2$	$I \circ T_2 = T_2$
$T_3 \circ I = T_3$	$I \circ T_3 = T_3$

c) $G = \{T_1, T_2, T_3, I\}$ tiene inverso $\forall T \in G$

$$T_1 T_3 = I \Rightarrow T_3 = T_1^{-1}$$

$$T_2 \circ T_2 = I \Rightarrow T_2 = T_2^{-1}$$

$$T_3 \circ T_1 = I \Rightarrow T_1 = T_3^{-1}$$

$$I \circ I = I \Rightarrow I = I^{-1}$$

Por tanto todo elemento de $G = \{T_1, T_2, T_3, I\}$ tiene inverso.

3. Consideremos el conjunto $S_3 = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ es biyectiva}\}$, los elementos de S_3 como se definieron en las notas veamos que propiedades cumplen bajo la composición de funciones.

a) Ya que la composición de funciones es asociativa, ésta bajo rotaciones y traslaciones es asociativa.

- b) No es conmutativa ya que: $\sigma_3 \circ \sigma_2 = \sigma_3$ y $\sigma_2 \circ \sigma_3 = \sigma_1 \Rightarrow \sigma_3 \circ \sigma_2 \neq \sigma_2 \circ \sigma_3$
- c) No tiene una única identidad por la derecha ya que $\sigma_3 \circ \sigma_1 = \sigma_3$ y $\sigma_3 \circ \sigma_2 = \sigma_3$
 Tiene una única identidad por la izquierda ya que:

$\sigma_1 \circ \sigma_3 = \sigma_3$	$\sigma_1 \circ \tau_1 = \tau_1$
$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2$	$\sigma_1 \circ \tau_2 = \tau_2$
$\sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_1$	$\sigma_1 \circ \tau_3 = \tau_3$

- d) Ellos mismos son su propio inverso.

$\sigma_1 = \sigma_1^{-1}$	ya que	$\sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_1$
$\sigma_2 = \sigma_2^{-1}$	ya que	$\sigma_2 \circ \sigma_2 = \sigma_1$
$\sigma_3 = \sigma_3^{-1}$	ya que	$\sigma_3 \circ \sigma_3 = \sigma_1$
$\tau_1 = \tau_1^{-1}$	ya que	$\tau_1 \circ \tau_1 = \sigma_1$
$\tau_2 = \tau_2^{-1}$	ya que	$\tau_2 \circ \tau_2 = \sigma_1$
$\tau_3 = \tau_3^{-1}$	ya que	$\tau_3 \circ \tau_3 = \sigma_1$

Ejercicios

Mostrar que los ejemplos dados en la sección anterior son grupos.

- Ya que vimos las propiedades del conjunto de las raíces del polinomio $x^4 - 1 = 0$ observamos que forman un grupo con la operación \times .
- Ya que vimos las propiedades del conjunto de las rotaciones definidas en los ejemplos preliminares observamos que forman un grupo bajo la composición de funciones.
- Ya que vimos las propiedades del conjunto de S_3 de los ejemplos preliminares observamos que forman un grupo bajo la composición de funciones.