Real Bermúdez Jesús M.

May 30, 2003

1. Ejercicios de las notas de la sección 2.4 de subgrupos normales

1. Si G es un grupo finito y $H < G$ entonces $o(H)|o(G)$.

   Demostración

   Tenemos que $[G : H] < \infty$. Sea $k = [G : H]$ y sean $C_1, C_2, \ldots, C_k$ las distintas clases laterales de H en G.

$$\Rightarrow \quad o(G) = \sum_{i=1}^{k} o(C_i) = \sum_{i=1}^{k} o(H) = k \quad o(H) \quad \Rightarrow \quad o(H)|o(G)$$

   q.e.d.

2. Si G es un grupo finito y $a \in G$ entonces $o(a)|o(G)$ y $a^{o(G)} = e$.

   Demostración

   $H =< a >= \{e, a, \ldots, a^{n-1}\}$ donde $n = o(a)$. Por el ejercicio anterior $n = o(H)|o(G) \quad \Rightarrow \quad o(G) = nq, q \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow$ $a^{o(G)} = (a^n)^q = e$.

   q.e.d.

2. Ejercicios de la sección 2.4 de subgrupos normales

1. Sean E un conjunto, $A \subseteq E$, $\varphi : \wp(E) \to \wp(E)$ la función definida por $\varphi(M) = M \cap A$. Sea $\Re$ la relación de equivalencia inducida por φ en $\wp(E)$. Demostrar que existe una biyección entre el conjunto cociente $\wp(E)/\Re$ y $\wp(A)$.
   Demostración

   Tenemos la función

$$\begin{aligned} \varphi : \wp(E) &\to \wp(E) \\ M &\mapsto M \cap A \end{aligned}$$

   pero $M \cap A \subset \wp(A)$ entonces construyamos el siguiente diagrama de funciones:

$$\begin{array}{ccc} \wp(E) & \longrightarrow & \wp(A) \\ \downarrow & & \\ \wp(E)/\Re & & \end{array} \tag{1}$$

   Vemos que para que exista una función biyectiva $\psi : \wp(E)/\Re \to \wp(A)$ la función φ debe ser suprayectiva (por las notas cap. 2.2.1) dado que π (la función canónica) es biyectiva. Sólo bastaría ver que φ es suprayectiva. En efecto pues, sea $a \in \wp(A)$ existe $e \in \wp(E)$ tal que $\varphi(e) = a$. Considerando $[e]_\Re$ tenemos que $\psi[e] = \varphi(\pi^{-1}[e]) = \varphi(e) = a$.

   q.e.d.

2. pendiente
3. pendiente
4. Sean R y S relaciones de equivalencia en los conjuntos E y F respectivamente.

   a) Demostrar que la relación en $E \times F$ definida por $(x, y) \sim (x', y')$ si y sólo si xRx' e ySy' es una relación de equivalencia. Se llama la relación producto.

c) Transitiva.- $(x,y) \sim (x',y')$ y $(x',y') \sim (z,w) \Leftrightarrow xRx' \quad e \quad ySy' \quad y \quad x'Rz \quad e \quad y'Sw$, como R y S son relaciones de equivalencia entonces si $xRx' \quad y \quad si \quad x'Rz \Rightarrow xRz$ y si $ySy' \quad y \quad si \quad y'Sw \Rightarrow ySw$. Por lo tanto la relación es transitiva.

Por lo tanto la relación definida en $E \times F$ es una relación de equivalencia.

b) Por definición $C(x,y) = \{(x',y')|(x,y) \sim (x',y')\}$ y $C_R(x) \times C_S(y) = \{(x',y')|x' \in C_R(x) e y' \in C_S(y)\}$.

Tenemos que probar que $C(x,y) = C_R(x) \times C_S(y)$, entonces basta probar las dos contenciones: $C(x,y) \subset C_R(x) \times C_S(y)$ y $C(x,y) \supset C_R(x) \times C_S(y)$.

Sea $(z,w) \in C(x,y)$ entonces $(x,y) \sim (z,w)$ si y sólo si $xRz \quad e \quad yRw \Rightarrow z \in C_R(x) \quad y \quad w \in C_S(y) \Rightarrow (z,w) \in C_R(x) \times C_S(y)$

Por lo tanto $c(x,y) \subset C_R(x) \times C_S(y)$.

Sea $(z',w') \in C_R(x) \times C_S(y) \Rightarrow z' \in C_R(x) y w' \in C_S(y) \Rightarrow xRz' \quad e \quad ySw' \Leftrightarrow (x,y) \sim (z',w') \Rightarrow (z',w') \in C(x,y)$

Por lo tanto $C_R(x) \times C_S(y) \subset C(x,y)$.

Por lo tanto C(x,y)=C$_R(x) \times C_S(y)$.

c) Construyendo el diagrama de funciones tenemos:

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & f(E \times F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E \times F/\sim & \longrightarrow & E/R \sim F/S \end{array} \tag{2}$$

Definimos la función

$$\begin{aligned} \varphi : & E \times F/\sim \longrightarrow E/R \times F/S \\ & [e,f]_\sim \mapsto \varphi([e,f]_\sim) = ([e]_R, [f]_S) \end{aligned} \tag{3}$$

Veamos que φ es inyectiva

$\varphi([e,f]_\sim) = \varphi([e',f']_\sim) \Rightarrow ([e]_R,[f]_S) = ([e']_R,[f']_S)$ ya que $[e]_R = [e']_R$ y $[f]_S = [f']_S \Rightarrow eRe' \quad fSf'$ donde $(e,f),(e',f') \in E \times F$.

Veamos que φ es suprayectiva

Sea $([e]_R,[f]_S) \in E/R \times F/S$ entonces existe $[e,f]_\sim \in E \times F/\sim$ tal que $\varphi()[e,f]_\sim = ([e]_R,[f]_S)$, ya que $C(x,y) = C_R(x) \times C_S(y)$ de aquí se nota la suprayección.

Por lo tanto φ es biyectiva.

5. pendiente

6. Demuestre que si el orden de un grupo es 3,4 o 5, debe ser Abeliano.

Demostración

Para ver esto contruyamos las tablas en las que se puede ver como se operan los elementos del grupo de cada orden.

Tabla 1

o	e	a_1	a_2
e	e	a_1	a_2
a_1	a_1	a_2	e
a_2	a_2	e	a_1

(4)

Tabla 2

o	e	a_1	a_2	a_3
e	e	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_2	a_3	e
a_2	a_2	a_3	e	a_1
a_3	a_3	e	a_1	a_2

(5)

Tabla 3

o	e	a_1	a_2	a_3
e	e	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	e	a_3	a_2
a_2	a_2	a_3	e	a_1
a_3	a_3	a_2	a_1	e

(6)

Tabla 4

o	e	a_1	a_2	a_3
e	e	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_3	2	a_2
a_2	a_2	e	a_3	a_1
a_3	a_3	a_2	a_1	e

(7)

Tabla 5

o	e	a_1	a_2	a_3
e	e	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	e	a_3	a_2
a_2	a_2	a_3	a_1	e
a_3	a_3	a_2	e	a_1

(8)

Tabla 6

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	e
a_2	a_2	a_3	a_4	e	a_1
a_3	a_3	a_4	e	a_1	a_2
a_4	a_4	e	a_1	a_2	a_3

(9)

Tabla 7

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_4	e	a_2	a_3
a_2	a_2	e	a_3	a_4	a_1
a_3	a_2	a_4	a_1	a_1	e
a_4	a_4	a_3	a_1	e	a_2

(10)

Tabla 8

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_3	a_4	e	a_2
a_2	a_2	a_4	a_3	a_1	e
a_3	a_3	a_2	e	a_4	a_1
a_4	a_4	e	a_1	a_2	a_3

(11)

Tabla 9

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_2	a_4	e	a_3
a_2	a_2	a_3	a_1	a_4	e
a_3	a_3	a_4	e	a_2	a_1
a_4	a_4	e	a_3	a_1	a_2

(12)

Tabla 10

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	e	a_4	a_2	a_3
a_2	a_2	a_4	a_3	a_1	e
a_3	a_3	a_2	e	a_4	a_1
a_4	a_4	a_3	a_1	e	a_2

(13)

Tabla 11

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_4	a_3	a_2	e
a_2	a_2	e	a_1	a_4	a_3
a_3	a_3	a_2	a_4	e	a_1
a_4	a_4	a_3	e	a_1	a_2

(14)

Tabla 12

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_3	e	a_4	a_2
a_2	a_2	a_4	a_3	e	a_1
a_3	a_3	a_2	a_4	a_1	e
a_4	a_4	e	a_1	a_2	a_3

(15)

Tabla 13

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	e
a_2	a_2	a_4	e	a_1	a_3
a_3	a_3	e	a_4	a_2	a_1
a_4	a_4	a_3	a_1	e	a_2

(16)

Tabla 14

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	e	a_4	a_2	a_3
a_2	a_2	a_3	a_1	a_4	e
a_3	a_3	a_4	e	a_1	a_2
a_4	a_4	a_2	a_3	e	a_1

(17)

Tabla 15

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_3	e	a_4	a_2
a_2	a_2	e	a_4	a_1	a_3
a_3	a_3	a_4	a_1	a_2	e
a_4	a_4	a_2	a_3	e	a_1

(18)

Tabla 16

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	e
a_2	a_2	a_4	a_1	e	a_3
a_3	a_3	e	a_4	a_2	a_1
a_4	a_4	a_3	e	a_1	a_2

(19)

Tabla 17

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	e	a_3	a_4	a_2
a_2	a_2	a_3	a_4	e	a_1
a_3	a_3	a_4	a_1	a_2	e
a_4	a_4	a_2	e	a_1	a_3

(20)

Tabla 18

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_4	e	a_2	a_3
a_2	a_2	a_3	a_1	a_4	e
a_3	a_3	a_2	a_4	e	a_1
a_4	a_4	e	a_3	a_1	a_2

(21)

Tabla 19

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_4	a_3	a_2	e
a_2	a_2	e	a_4	a_1	a_3
a_3	a_3	a_2	e	a_4	a_1
a_4	a_4	a_3	a_1	e	a_2

(22)

Tabla 20

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_3	e	a_4	a_2
a_2	a_2	a_4	a_1	e	a_3
a_3	a_3	a_2	a_4	a_1	e
a_4	a_4	e	a_3	a_2	a_1

(23)

Tabla 21

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	e	a_4	a_2	a_3
a_2	a_2	a_3	e	a_4	a_1
a_3	a_3	a_4	a_1	e	a_2
a_4	a_4	a_2	a_3	a_1	e

(24)

Tabla 22

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	e
a_2	a_2	a_4	e	a_1	a_3
a_3	a_3	e	a_4	a_2	a_1
a_4	a_4	a_3	a_1	e	a_2

(25)

Tabla 23

o	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_4	a_3	a_2	e
a_2	a_2	a_3	a_4	e	a_1
a_3	a_3	e	a_1	a_4	a_2
a_4	a_4	a_2	e	a_1	a_3

(26)

Como podemos observar, la tabla 1 cumple con:

$$a_1 \circ a_1^2 = a_2 \circ a_1 = e$$

$$a_2^2 = a_1$$

$$a_1 \circ a_2 = e$$

$$a_2 \circ a_1 = e$$

.

Por lo tanto vemos que si es un grupo de orden tres, éste debe ser Abeliano.

Oberservemos que, las tabla 2 cumple con:

$$a_1 \circ a_1 = a_2$$

$$a_1 \circ a_2 = a_3$$
$$a_1 \circ a_3 = e$$
$$a_2 \circ a_1 = a_3$$
$$a_2 \circ a_2 = e$$
$$a_2 \circ a_3 = a_1$$
$$a_3 \circ a_1 = e$$
$$a_3 \circ a_2 = a_1$$
$$a_3 \circ a_3 = a_2$$
$$a_1^2 \circ a_1 \circ a_1 = a_1^2 \circ a_2 = a_1 \circ a_3 = e$$
$$a_2^2 \circ a_2 \circ a_2 = a_2^2 = e$$
$$a_3^2 \circ a_3 \circ a_3 = a_3^2 \circ a_2 = a_3 \circ a_1 = e$$

Las tablas 3,4,5 cumplen propiedades similares.

Por lo tanto vemos que si es un grupo de orden cuatro, éste debe ser Abeliano.

Observemos también que, la tabla 6 cumple con:

$$a_1 \circ a_1 = a_2$$
$$a_1 \circ a_2 = a_3$$
$$a_1 \circ a_3 = a_4$$
$$a_1 \circ a_4 = e$$
$$a_2 \circ a_1 = a_3$$
$$a_2 \circ a_2 = a_4$$
$$a_2 \circ a_3 = e$$
$$a_2 \circ a_4 = a_1$$
$$a_3 \circ a_1 = a_4$$
$$a_3 \circ a_2 = e$$
$$a_3 \circ a_3 = a_1$$
$$a_3 \circ a_4 = a_2$$
$$a_4 \circ a_1 = e$$
$$a_4 \circ a_2 = a_1$$
$$a_4 \circ a_3 = a_2$$
$$a_4 \circ a_4 = a_3$$
$$a_1^5 = e$$
$$a_2^3 \circ a_2^2 = a_2^3 \circ a_4 = a_2^2 \circ a_1 = a_2 \circ a_3 = e$$
$$a_3^3 \circ a_3^2 = a_3^3 \circ a_4 = a_3 \circ a_2 = e$$

Las tablas del 7 al 23 cumplen propiedades similares

Por lo tanto vemos que si es un grupo de orden cinco, éste debe ser Abeliano.

q.e.d.

7. Demuestre que si el orden de un grupo es primo, debe ser Abeliano.

Demostración

Como el orden de G es primo digamos que $o(G) = p$. Sea $H < G$, por lo tanto $o(H)|o(G)$, sea $q = o(H)$, entonces $q|p$ pero p es primo, por lo tanto $q = 1$ ó $q = p$, por lo que si $q = 1$ entonces $H = \{e\}$ y si $q = p$ entonces $H = G \Rightarrow$ todo subgrupo es G, por lo tanto G es cíclico y como todo grupo cíclico es abeliano, entonces G es Abeliano.

q.e.d.

8. pendiente

9. Halle todos los subgrupos se S_3 y determine cuales de ellos son subgrupos normales.

Solución

Sea $S_3 = \{e = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ y sea $N =< \sigma_2 >=\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, veamossi$N $\lhd S_3$, para esto vemos que las clases laterales como están definidas: $S_3/_I N = \{aN|inS_3\} = \{N, \tau_3 N, \sigma_2 N, \sigma_3 N, \tau_1 N, \tau_2 N1\} = \{N, \tau_3 N\}$ y $S_3/_D N = \{Na|inS_3\} = \{N, N\tau_3, N\sigma_2, N\sigma_3, N\tau_1, N\tau_2\} = \{N, N\tau_3\}$.

Como $S_3/_I N$ y $s_3/_D N$ inducen particiones de S$_3 setiene$N $\tau_3 = \tau_3 N$, por lo tanto $S_3/_I N = S_3/_D N$ y $N \lhd S_3$ con $[S_3 : N] = 2$.

Ahora tomemos $H =< \tau_3 >= \{\sigma_1, \tau_3\}$, se tiene que $[S_3 : H] = \frac{|S_3|}{H} = \frac{6}{2} = 3$. Así $S_3/_I H = \{H, \sigma_2 H, \sigma_3 H\}$ puesto que: $\sigma_2 H = \{\sigma_2, \tau_2\} = \{\sigma_2, \tau_1\}$ y $\sigma_3 H = \{\sigma_3, \tau_1\}$ y $S_3/_D H = \{H, H\sigma_2, H\sigma_3\}$ donde $H\sigma_2 \notin S_3/_I H \Rightarrow S_3/_I \neq S_3/_D H \Rightarrow H \ntriangleleft S_3$.

$S_3 < S_3$ y $\{\sigma_1 < S_3\}$. Éstos son todos los subgrupos de S_3.

10. Halle todos los subgrupos de G, donde $o(G) = 8$ y $a \neq e$, entonces $a^2 = e$.

Solución

Sea $G = \{e, a_1, a_2, a_3, a_4 a_5, a_6, a_7\}$ grupo y $a_i \in G \quad i = 1, .., 7$ entonces tenemos que los cadidatos a ser subgrupos de G son los conjuntos de órden 2 y 4, pero para el caso de los conjuntos de orden 2 se tiene que son subgrupos de G, sea $H_i = \{e, a_i\}\ \forall i = 1, ..., 7.$, tambien están los ubgrupos triviales $Gy\{e\}$, pero del conjunto de orden 4 no podemos asegurar nada puesto que no tenemos los suficientes hipótesis.

11. Hallar todas las clases laterales en los siguientes casos y determine el índice respectivo:

    a) Del grupo Aditivo de los números reales mediante el subgrupo de los números enteros.
    b) Del grupo aditivo de los números complejos mediante el subgrupo de los número gaussianos, donde los números gaussianos son de la forma: $a + ib$ con a,b enteros.
    c) Del grupo aditivo de los vectores en el plano mediante el subgrupo de los vectores yacentes en el eje ox.
    d) Del grupo multiplicativo de los números complejos distintos de cero, mediante el subgrupo de los números complejos cuyo módulo es uno.
    e) Del grupo multiplicativo de los número complejos distintos de cero, mediante el subgrupo de los números reales positivos.

Solución

a) $\mathbb{R}^+/\mathbb{Z}^+ = \{x + n|x \in [0, 1), n \in \mathbb{Z}\}$ y $[\mathbb{R}^+ : \mathbb{Z}^+] = \infty$

b) $\mathbb{C}^+/H = \{(a + ib) + G|a, b \in [0, 1]\}$ y donde $H = \{(a, b) \in \mathbb{C}|a + ib \in \mathbb{C}\}$ y $[\mathbb{C}^+ : H] = \infty$

c) Pendiente

d) $\mathbb{C}^{*\times}/H = \{xH|x \in \mathbb{R}^+\}$y $[\mathbb{C}^{*\times} : H] = \infty$ con H=$\{$(a,b)$\in \mathbb{C}||(a, b)| = 1\}$.

e) Pendiente

12. Hallar el grupo cociente G/H en los siguientes casos:

   a) $G = (3\mathbb{Z}, +, 0)$, $H = (15\mathbb{Z}, +, 0)$

b) $G = (4\mathbb{Z}, +, 0)$, $H = (24mathbbZ, +, 0$

Solución

a) $[0] = \{x|x-3 = k\cdot 15\} = \{0, 15, 30, ...\}$ $[3] = \{x|x-6 = k\cdot 15\} = \{3, 18, 27, 33, ...\}$ $[6] = \{x|x-6 = k\cdot 15\} = \{6, 9, 21, 24, ...\}$
b)*Pendiente*

13. Sea $K < H < G$ tales que $[G : K] = p$ con p número primo demuestre que $H = K$ ó $H = G$.

Demostración

Como $[G : K] = p$ y como $n = [H : K]|[G : K] = p$ y $p = [G : K] = [G : H][H : K] = mn$ entonces $p = mn \Rightarrow m = 1$ y $n = p$ ó $m = p$ y $n = 1 \Rightarrow G = H$ y $H \neq K$ ó $G \neq H$ y $H = K$.

q.e.d.

14. Pendiente

15. Pendiente

16. Sea G un grupo y A un conjunto que satisface que para cualquier $g \in G$, $gAg^{-1} \subset A$, pruebe que el subgrupo generado por A es subgrupo normal de G.

Demostración

Debemos ver que $< A > \lhd G$.
Sea $x = \Pi_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i}$ tal que $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $a_i \in A$, $x \in < A >$.
Sea $g \in G$, $gxg^{-1} \in < A >$. $gxg^{-1} = g\Pi_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i} g^{-1} = g(a_1^{\alpha_1} e a_2^{\alpha_2} e ... e a_n^{\alpha_n})g^{-1} = ga_1^{\alpha_1} g^{-1} g a_2^{\alpha_2} g g^{-1} \cdot \ldots \cdot g a_n^{\alpha_n} g^{-1} \in < A >$, siempre y cuando $\alpha = \{+1\}$.
Ahora probemos que también es válida para $\alpha = \{-1\}$
$ga_1^{-1}g^{-1} = g^{-1}a_1a_1^{-1}a_1a_1^{-1}a_1g^{-1} = ga_1^{-1}a_1a_1^{-1}eg^{-1} = g^{-1}a_1^{-1}a_1a_1^{-1}g^{-1}$,
pero como $A \subset G$ entonces $a_1^{-1} \in G$ entonces $ga_1^{-1} \in G$ y $a_1^{-1}g^{-1} \in G \Rightarrow (a_1g)^{-1}a(ga)^{-1} \in A$ y si $\alpha = \{-1\}$ también se cumple que $\mathrm{ga}_1^{\alpha_1} g^{-1} g a_2^{\alpha_2} g g^{-1} \cdot \ldots \cdot g a_n^{\alpha_n} g^{-1} \in < A >$.

q.e.d.

17. Sea $H < G$, tal que $[G : H] = 2$, demuestre que:

   a) $H \lhd G$

   b) Si $a \notin H$ y $b \notin H$ entonces $ab \in H$.

   c) el conjunto $\{a^2|a \in G\} \subset H$.

Demostración

a) Como $[G : H] = 2$ las clases derechas son $\{H, Hg\}$ y las clases izquierdas son

$$\{H, g_1H\}.EstasdosclasesdefinenunaparticióndeGdisjunta, necesariamente$$

$\mathrm{g}_1H = Hg$ $\forall g \in G$. Por lo tanto $H \lhd G$.

b) Supogamos que $ab \notin H$ entonces $ab \in Hg \Rightarrow ab = hg$ par algún $h \in H \Rightarrow a = h_1 g$ y $b = h_2 g$ para algún $h_1, h_2 \in H \Rightarrow ab = h_1 g h_2 g \Rightarrow ab \in HgHg = (Hg)^2 = Hg^2 = H \Rightarrow ab \in H$

Lo cual contradice nuestra hipótesis.

c) Como $[G : H] = 2$, entonces H y H_g definen una partición de G tal que $H \cap H_g =$. Sea $g \in G \Rightarrow g \in H$ ó $g \in H_g$.

Si $g \in H$ como $H < G \Rightarrow gg \in H$.

Si $g \notin H \Rightarrow g \in H_g$, si gg no estuviera en H, entoces $gg = hg$ para algún $hg \in H_g \Rightarrow g = h \Rightarrow g \in H$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $g^2 \in H \quad \forall g \in G$.

Otra forma de verlo es: como $[G : H] = 2 \Rightarrow H \lhd G$ $G/H = \{H, gH\} \Rightarrow (Ha)^2 = HaHa = Ha^2 = H \Rightarrow a^2 \in H$.

q.e.d.

18. Sean $M, N \lhd G$ tales que $M \cap N = \{e\}$, pruebe que $mn = nm$ para cualesquiera $m \in M$,$n \in N$.

Demostración

Si $e \in M \cap N \Rightarrow$

Como $M \lhd G \Rightarrow gmg^{-1} \in M$.

Como $N \lhd G \Rightarrow gng^{-1} \in N \Rightarrow$ por un lado $nmn^{-1} \in M$ y $m^{-1} \in M$ y por otro lado $mn^{-1}m^{-1} \in N$ y $n \in N$ ya que $n, n^{-1}, m, m^{-1} \in G$.

por lo tanto $(nmn^{-1}m^{-1}) = (nm)(mn)^{-1} = (mn)(mn)^{-1} = e \Rightarrow mn = nm$.

q.e.d.

19. pendiente

20. Sea G un grupo demuestre lo siguiente:

    a) La intersección arbitraria de subgrupos normales de G es subgrupo normal de G.

    b) Si $H, K \lhd G$ entonces $HK \lhd G$.

Demostración

(a) Si $N_i, i = 1, \ldots, n$ son subgrupos normales en G, entonces para todo $n \in N_i, i = 1, \ldots, n$ y para todo $g \in G$ $gng^1 \in N_i$ con $i = 1, \ldots, n$ ya que cada uno de los $N_1, \ldots, N_n$ son subgrupos normales en G. $\Rightarrow \quad gng^{-1} \in \cup_{k=1}^{n} N_k$.

Por lo tanto la intersección de subgrupos normales en G es normal en G.

(b) Sean $a \in HK$ y $g \in G$. Como $a \in HK$ entonces existen $h \in H$ y $k \in K$ tal que $a = hk$

$$ghkg^{-1} = ghg^{-1}gkg^{-1}$$

como H y K son subgrupos normales en G entonces $\forall g \in G$ y dados $h \in H$ y $k \in K$

$$ghg^{-1} \quad gkg^{-1}$$

entonces existe un $h_1 \in H$ y existe un $k_1 \in K$ tales que $ghg^{-1} = h_1$ y $gkg^{-1} = k_1$

Por lo tanto $ghkg^{-1} = ghg^{-1}gkg^{-1} = h_1 k_1 \in HK$.

Por lo tanto $NM \lhd G$.

q.e.d.

21. Sea G un grupo, $H \lhd G$ y H es cíclico, demuestre que cualquier subgrupo de H es subgrupo normal de G.

Demostración

Como T es cíclico entonces existe $a \in T$ tal que $T = \langle a \rangle$. Sea $H < T \Rightarrow$ H es cíclico es decir, existe $a^k \in H$ tal que $H = \langle a^k \rangle$.

Veamos que $gHg^{-1} \subset H \quad \forall g \in G$.

Sea $y \in gHg^{-1} \Rightarrow$ existe $h \in H$ tal que $y = ghg^{-1}$ entonces $y = ghg^{-1} = g(a^k)^s g^{-1} = (gag^{-1})^{ks}$ y ya que $T \lhd G$ entonces $(gag^{-1})^{ks} = (a^r)^{ks} = (a^k)^{rs} \in H$

Por lo tanto $H \lhd G$

q.e.d.

22. pendiente

23. pendiente

24. pendiente

25. pendiente

Real Bermúdez Jesús M.

2. Sean E y F dos conjuntos, $\varphi : E \to F$ una función, R una relación de equivalencia en F. Demostrar que la relación S definida en E como $xSy \Leftrightarrow \varphi(x)R\varphi(y)$ es relación de equivalencia. Si $A = \varphi(E)$, sea R_A la relación R restringida a A. Encuentre una biyección entre $E/minusS$ y AR_A.

Demostración

Primero probemos que la relación S es una relación de equivalencia. Entonces debemos ver que:

1. Es reflexiva: entonces $xSx \Leftrightarrow \varphi(x)R\varphi(x)$, como R es una relación de equivalencia entonces R es reflexiva y por lo tanto S también lo es.
2. Es simétrica: $xSy \Leftrightarrow \varphi(x)R\varphi(y)$, como R es una relación de equivalencia entonces R es simétrica $\Rightarrow$ si $\varphi(x)R\varphi(y)$ entonces $\varphi(y)R\varphi(x)$.
3. xSy y $ySs \Leftrightarrow \varphi(x)R\varphi(y)$ y $\varphi(y)R\varphi(s)$, como R es una relación de equivalencia, en particular es transitiva $\Rightarrow$ si $\varphi(x)R\varphi(y)$ y $\varphi(y)R\varphi(s) \Rightarrow \varphi(x)R\varphi(s)$.

Por lo tanto la relación S definida en E como $xSy \Leftrightarrow \varphi(x)R\varphi(y)$ es relación de equivalencia.

Ahora tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\varphi"] & E \setminus \mathcal{S} \arrow[d, "g"] \\ F \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[ur, "f"] & H \end{tikzcd}$$

La biyección que se pide es: $g = \pi_2 f^{-1}$ y para que esto pase debemos pedir a la función f que sea inyectiva y suprayectiva. La función f es inyectiva, ya que si $y = f(x') \in [\varphi(x)] \Leftrightarrow xSy$ donde $x, y \in E \setminus S$. La función f es biyectiva, ya que dado $x' \in E \setminus S$ existe un $y = \varphi(y) \in F$ tal que $f(y) = x'$ esto es gracias a que la Relación de equivalencia S está definida como $xSy \Leftrightarrow \varphi(x)R\varphi(y)$. Ya sabemos que la función proyección canónica es suprayectiva, entonces se tiene la biyección $g = \pi_2 f^{-1}$.

q.e.d.

12. Hallar el grupo cociente G/H en los siguientes casos:

1. $G = (3\mathbb{Z}, +, 0)$, $H = (15\mathbb{Z}, +, 0)$
2. $G = (4\mathbb{Z}, +, 0)$, $H = (24\mathbb{Z}, +, 0$

Solución

(a) Entregado anteriormente
(b)G\$H = \{[0][8][12][20]\}$, donde $[0] = \{0, 24, 48, 72, ...\}$,$[8] = \{8, 16, 32, 40, 56, 64, 80, ...\}$, $[12] = \{12, 36, 60, 84, ...\}$, $[20] = \{4, 20, 28, 44, 52, 68, 76, ...\}$.

15. Sea G un grupo abeliano y n un número natural fijo, pruebe que $L_n = \{x \in G | x^n = e\}$ es subgrupo normal de G.

Demostración

1. $e \in L_n$ ya que $e^n = e$
2. Si $l \in L_n$ entonces $l^{-1} \in L_n$ ya que $(l)^n = e \Rightarrow (l^{-1})^3 = (l^3)^{-1} = e$ por lo tanto $l^{-1} \in L_n$
3. Si $l_1, l_2 \in L_n$ entonces $l_1 * l_2 \in L_n$ ya que $l_1^n = e$ y $l_2^n = e$ entonces como G es abeliano$l_1^n * l_2^n = (l_1 * l_2)^n = e$ $\Rightarrow l_1 * l_2 \in L_n$.

q.e.d.

25. Sea G un grupo de orden p^2, con p un número primo entonces el grupo es abeliano.

Demostración

Esta demostración la dividiremos en dos casis:

a) Cuando alguno de los elementos de G es de orden p^2 entonces esto implica que G es cíclico y todo Grupo cíclico es abeliano.

b) Si todos los elementos de G distintos de la identidad son de orden p, entonces por el inciso (24) esto implica que G es abeliano.

Por lo tanto si G es un grupo de orden p^2, con p un número primo entonces el grupo es abeliano.

q.e.d.