Real Bermúdez Jesús M.

3 de abril de 2003

Demostrar propiedades de los homomorfismos restantes

1. El $Ker(f) \lhd G$

Demostración

$Ker(f) = \{a \in G | f(a) = e\}$
Notemos que $Ker(f) \neq$ (pues $e \in Ker(f)$).
Sean $a, b \in Ker(f)$ entonces:

$$\begin{aligned} f(ab^{-1} &= f(a)f(b^{-1}) \\ &= f(a)f(b)^{-1} \\ &= ee^{-1} = e \Rightarrow ab^{-1} \in Ker(f) \end{aligned} \tag{1}$$

Por lo tanto $Ker(f) < G$
Sea $g \in G$ y $a \in Ker(f)$

$$\begin{aligned} f(gag^{-1}) &= f(g)f(a)f(g)^{-1} \\ &= f(g)f(g)^{-1} = e \end{aligned}$$

(2)

Por lo tanto $gag^{-1} \in Ker(f)$.
$\Rightarrow Ker(f) \lhd G$.
2. Sea f: G $\rightarrow G_1$ un homomorfismo, entonces: si $H < G \Rightarrow f(H) < G_1$.

Demostración

Tenemos que $f(H) \neq$, pues $e = f(e) \in f(H)$
Sean $a_1, b_1 \in f(H) \Rightarrow$ existen $h_1, h_2 \in H$ tal que $f(h_1) = a_1$ y $f(h_2) = b_1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= f(h_1)f(h_2)^{-1} \\ &= f(h_1)f(h_2^{-1}) \\ &= f(h_1 h_2^{-1}) \end{aligned} \tag{3}$$

donde $h_1 h_2^{-1} \in H \Rightarrow a_1 b_1 \in f(H)$

3. Si $H_1 < G_1 \Rightarrow f^{-1}(H_1) < G$ con $Ker(f) < f^{-1}(H_1)$

Demostración

Tenemos que $f(e) = e \Rightarrow e \in f^{-1}(H_1) \Rightarrow f^{-1}(H_1) \neq$.
Sean $a, b \in f^{-1}(H_1) \Rightarrow f(a), f(b) \in H_1 \Rightarrow f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} \in H_1 \Rightarrow ab^{-1} \in f^{-1}(h_1)$
Por otro lado, sea $a \in Ker(f) \Rightarrow f(a) = e \in H_1 \Rightarrow a \in f^{-1}(H_1)$
Por lo tanto $Ker(f) < f^{-1}(H_1)$.

4. f es monomorfismo $\Leftrightarrow Ker(f) = \{e\}$

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $a \in Ker(f) \Rightarrow f(a) = e = f(e) \Rightarrow a = e$
Por lo tanto $Ker(f) = \{e\}$.

$\Leftarrow$) Sea $a, b \in G$ tal que $f(a) = f(b) \Rightarrow f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} = e \Rightarrow ab^{-1} \in Ker(f) = \{e\} \Rightarrow ab^{-1} = e \Rightarrow a = b$.
Por lo tanto f es monomorfismo